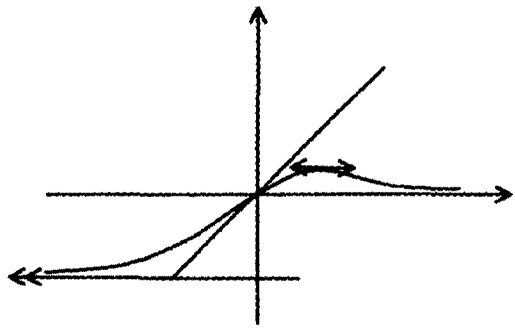
b) $f(x) - x = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = (x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

$\Rightarrow f(x) - x = \dfrac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-(x+1)x^2}{(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

- Sur $]-\infty,-1[$ on a : $f(x) - x > 0$ donc C_f est eu dessus de T .
- Sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ on a : $f(x) - x < 0$ donc C_f est au dessous de T .
- $C_f \cap T = \{ O(0,0) ; I(-1,-1) \}$.

3°/



4°/

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$

- Pour $n = 0$, $U_0 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -1 < U_0 < 0$
- Supposons que pour un entier donné n , $-1 < U_n < 0$ et montrons que $-1 < U_{n+1} < 0$.

On a : $-1 < U_n < 0$ et comme f est strictement croissante sur $[-1, 0]$ alors

$f(-1) < f(U_n) < f(0)$ or $f(-1) = -1$ et $f(0) = 0$

d'où $-1 < U_{n+1} < 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$.

Etudions le sens de variations de la suite (U_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$